La baderne de Rauzy

Pierre Arnoux

Rencontre Algéro-Tunisienne de Dynamique Symbolique, Béjaïa

Travail commun avec Gérard Rauzy, Stepan Starosta, Pascal Hubert, Julien Cassaigne, Sébastien Ferenczi, Xavier Bressaud, Julien Bernat, Tarek Sellami...

25 juin 2022

The Rauzy Gasket

Pierre Arnoux

Joint work with Gérard Rauzy, Stepan Starosta, Pascal Hubert, Julien Cassaigne, Sébastien Ferenczi, Xavier Bressaud, Julien Bernat...

25 juin 2022

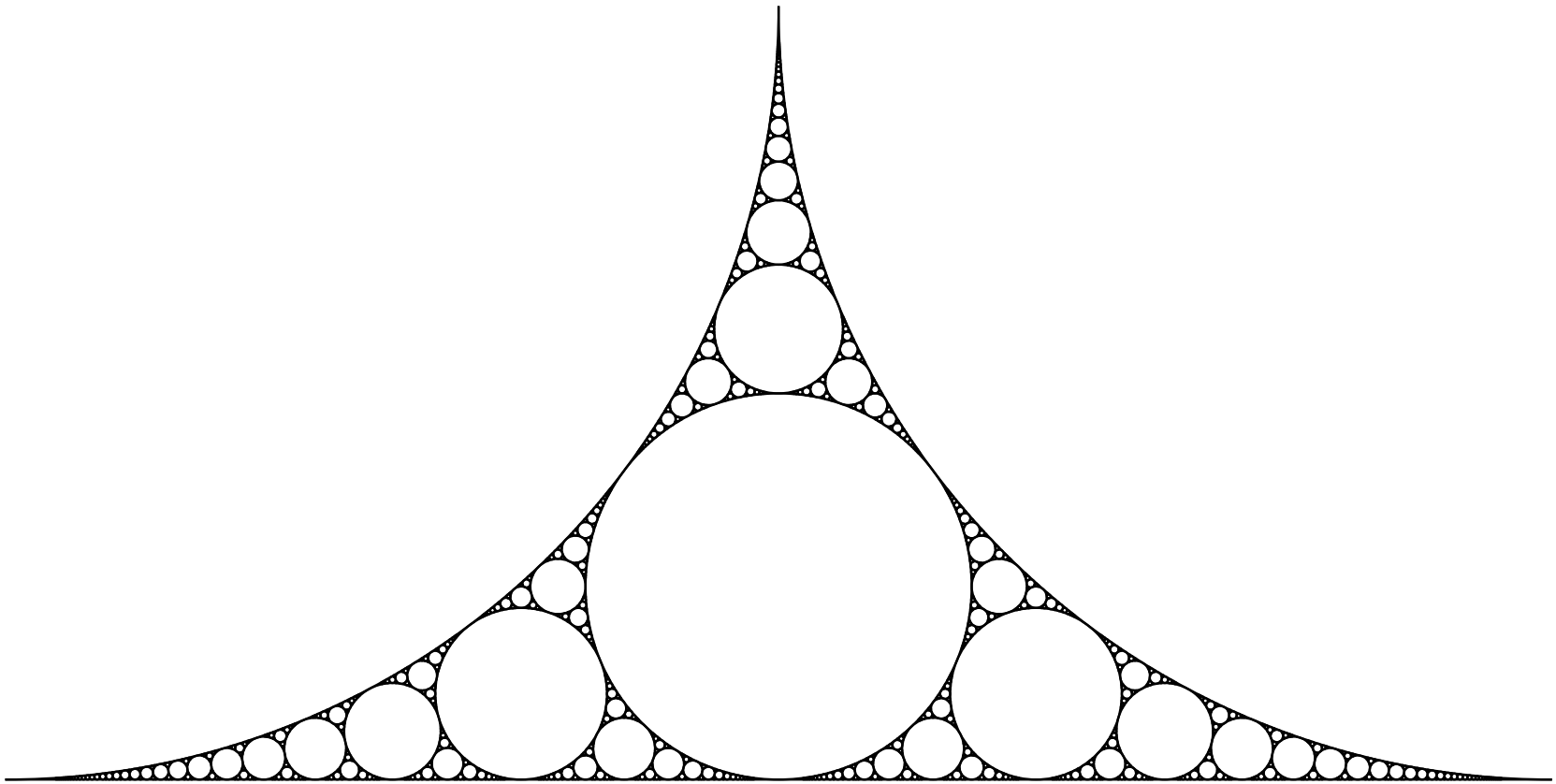
Une baderne

Une baderne

Une baderne

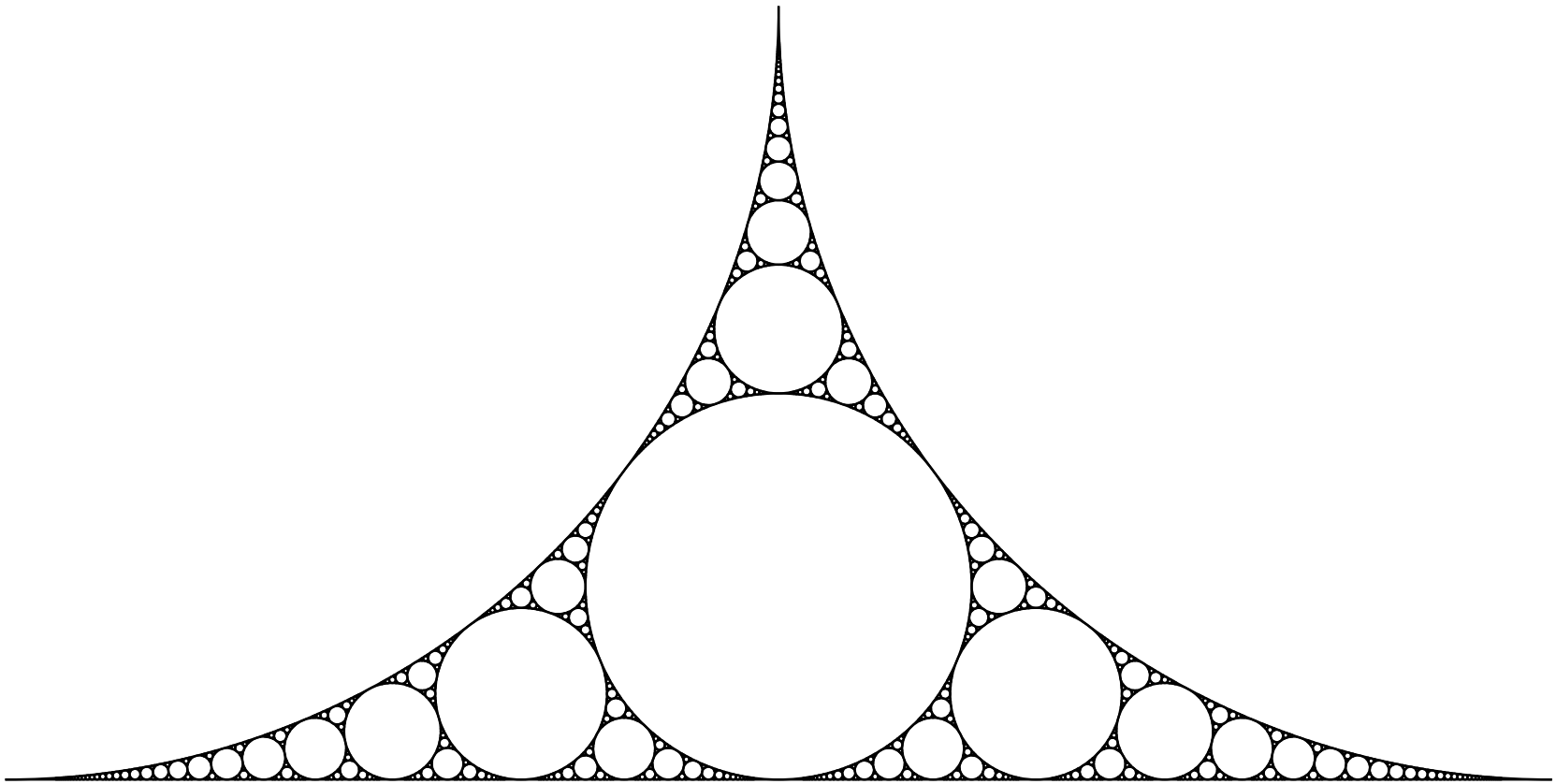
Baderne : nouage plat, réalisé en 2 dimensions (surface) pouvant adopter plusieurs géométries (cercle, rectangle, bande, polygone, triangle, autre...).
Les badernes ont pour premier usage la protection du bois d'une embarcation.
Ces nouages sont traditionnellement réalisés avec des cordages usagés ou abîmés.

La baderne d'Apollonius

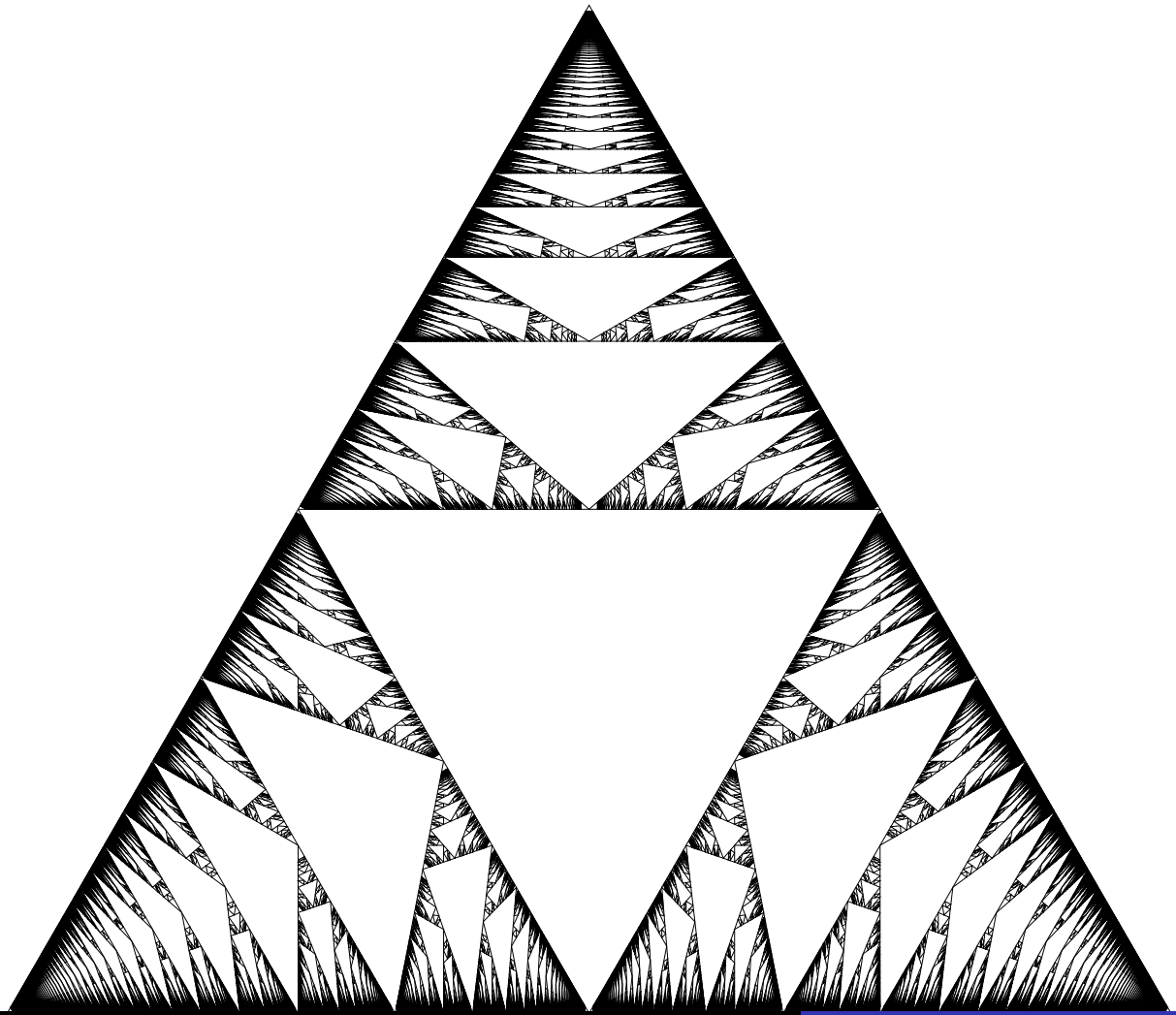


A gasket

The Apollonian gasket



La baderne de Rauzy



But

Donner plusieurs définitions équivalentes de la baderne de Rauzy
Montrer les systèmes dynamiques associés

Complexité d'un mot

- $\mathcal{A}$ alphabet fini
- $u = (u_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ suite (ou mot infini)
- $W = u_k u_{k+1} \dots u_{k+n-1}$ est un *facteur* de u de longueur n

- Définition

  La complexité de u est la fonction $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $p(n)$ est le nombre de facteurs de longueur n de u.

Complexité d'un mot

- $\mathcal{A}$ alphabet fini
- $u = (u_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ suite (ou mot infini)
- $W = u_k u_{k+1} \dots u_{k+n-1}$ est un *facteur* de u de longueur n

- Définition

  La complexité de u est la fonction $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $p(n)$ est le nombre de facteurs de longueur n de u.

Complexité d'un mot

- $\mathcal{A}$ alphabet fini
- $u = (u_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ suite (ou mot infini)
- $W = u_k u_{k+1} \dots u_{k+n-1}$ est un *facteur* de u de longueur n

- Définition

  La complexité de u est la fonction $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $p(n)$ est le nombre de facteurs de longueur n de u.

Complexité d'un mot

- $\mathcal{A}$ alphabet fini
- $u = (u_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ suite (ou mot infini)
- $W = u_k u_{k+1} \dots u_{k+n-1}$ est un *facteur* de u de longueur n

- Définition
  La complexité de u est la fonction $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $p(n)$ est le nombre de facteurs de longueur n de u.

Complexité d'un mot

- La complexité est sous-multiplicative :
- $p(n+m) \leq p(n)p(m)$
- donc $\lim_{n\to\infty} \frac{\log P(n)}{n}$ existe : c'est l'entropie du mot.
- De l'autre côté, périodique à partir d'un certain rang implique complexité bornée.
- Réciproquement, si pour un n, $p(n) = p(n)+1$, le mot est ultimement périodique.

Complexité d'un mot

- La complexité est sous-multiplicative :
- $p(n+m) \leq p(n)p(m)$
- donc $\lim_{n\to\infty} \frac{\log P(n)}{n}$ existe : c'est l'entropie du mot.
- De l'autre côté, périodique à partir d'un certain rang implique complexité bornée.
- Réciproquement, si pour un n, $p(n) = p(n)+1$, le mot est ultimement périodique.

Complexité d'un mot

- La complexité est sous-multiplicative :
- $p(n+m) \leq p(n)p(m)$
- donc $\lim_{n\to\infty} \frac{\log P(n)}{n}$ existe : c'est l'entropie du mot.
- De l'autre côté, périodique à partir d'un certain rang implique complexité bornée.
- Réciproquement, si pour un n, $p(n) = p(n)+1$, le mot est ultimement périodique.

Complexité d'un mot

- La complexité est sous-multiplicative :
- $p(n+m) \leq p(n)p(m)$
- donc $\lim_{n\to\infty} \frac{\log P(n)}{n}$ existe : c'est l'entropie du mot.
- De l'autre côté, périodique à partir d'un certain rang implique complexité bornée.
- Réciproquement, si pour un n, $p(n) = p(n)+1$, le mot est ultimement périodique.

Complexité d'un mot

- La complexité est sous-multiplicative :
- $p(n+m) \leq p(n)p(m)$
- donc $\lim_{n\to\infty} \frac{\log P(n)}{n}$ existe : c'est l'entropie du mot.
- De l'autre côté, périodique à partir d'un certain rang implique complexité bornée.
- Réciproquement, si pour un n, $p(n) = p(n)+1$, le mot est ultimement périodique.

Mots de complexité minimale

- Toute suite apériodique a une complexité au moins $n+1$.
- les mots de de complexité $n+1$, appelés mots sturmiens, existent.
- $p(1)=2 \implies$ 2 lettres : $\mathcal{A}=\{0,1\}$.
- $p(2)=3 \implies$ 00 ou 11 n'apparaît pas (10, 01 doivent exister).
- u est de type 0 (resp. 1) si 11 (resp 00) n'apparaît pas.
- Soit σ_0 le morphisme de $\mathcal{A}^*$ defini par $0 \mapsto 0 \quad 1 \mapsto 10$.
- Tout mot sturmien u de type 0 (resp. 1) peut être écrit (à la première lettre près), $u=\sigma_0(v)$ (resp.$u=\sigma_1(v)$).
- il est remarquable que v est aussi sturmien.

Mots de complexité minimale

- Toute suite apériodique a une complexité au moins $n+1$.
- les mots de de complexité $n+1$, appelés mots sturmiens, existent.
- $p(1)=2 \implies$ 2 lettres : $\mathcal{A}=\{0,1\}$.
- $p(2)=3 \implies$ 00 ou 11 n'apparaît pas (10, 01 doivent exister).
- u est de type 0 (resp. 1) si 11 (resp 00) n'apparaît pas.
- Soit σ_0 le morphisme de $\mathcal{A}^*$ defini par $0 \mapsto 0 \quad 1 \mapsto 10$.
- Tout mot sturmien u de type 0 (resp. 1) peut être écrit (à la première lettre près), $u=\sigma_0(v)$ (resp.$u=\sigma_1(v)$).
- il est remarquable que v est aussi sturmien.

Mots de complexité minimale

- Toute suite apériodique a une complexité au moins $n+1$.
- les mots de de complexité $n+1$, appelés mots sturmiens, existent.
- $p(1) = 2 \implies$ 2 lettres : $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.
- $p(2) = 3 \implies$ 00 ou 11 n'apparaît pas (10, 01 doivent exister).
- u est de type 0 (resp. 1) si 11 (resp 00) n'apparaît pas.
- Soit σ_0 le morphisme de $\mathcal{A}^*$ defini par $0 \mapsto 0 \quad 1 \mapsto 10$.
- Tout mot sturmien u de type 0 (resp. 1) peut être écrit (à la première lettre près), $u = \sigma_0(v)$ (resp.$u = \sigma_1(v)$).
- il est remarquable que v est aussi sturmien.

Mots de complexité minimale

- Toute suite apériodique a une complexité au moins $n+1$.
- les mots de de complexité $n+1$, appelés mots sturmiens, existent.
- $p(1)=2 \implies$ 2 lettres : $\mathcal{A}=\{0,1\}$.
- $p(2)=3 \implies$ 00 ou 11 n'apparaît pas (10, 01 doivent exister).
- u est de type 0 (resp. 1) si 11 (resp 00) n'apparaît pas.
- Soit σ_0 le morphisme de $\mathcal{A}^*$ defini par $0 \mapsto 0 \quad 1 \mapsto 10$.
- Tout mot sturmien u de type 0 (resp. 1) peut être écrit (à la première lettre près), $u=\sigma_0(v)$ (resp.$u=\sigma_1(v)$).
- il est remarquable que v est aussi sturmien.

Mots de complexité minimale

- Toute suite apériodique a une complexité au moins $n+1$.
- les mots de de complexité $n+1$, appelés mots sturmiens, existent.
- $p(1)=2 \implies$ 2 lettres : $\mathcal{A}=\{0,1\}$.
- $p(2)=3 \implies$ 00 ou 11 n'apparaît pas (10, 01 doivent exister).
- u est de type 0 (resp. 1) si 11 (resp 00) n'apparaît pas.
- Soit σ_0 le morphisme de $\mathcal{A}^*$ defini par $0 \mapsto 0 \quad 1 \mapsto 10$.
- Tout mot sturmien u de type 0 (resp. 1) peut être écrit (à la première lettre près), $u=\sigma_0(v)$ (resp.$u=\sigma_1(v)$).
- il est remarquable que v est aussi sturmien.

Mots de complexité minimale

- Toute suite apériodique a une complexité au moins $n+1$.
- les mots de de complexité $n+1$, appelés mots sturmiens, existent.
- $p(1)=2 \implies$ 2 lettres : $\mathcal{A}=\{0,1\}$.
- $p(2)=3 \implies$ 00 ou 11 n'apparaît pas (10, 01 doivent exister).
- u est de type 0 (resp. 1) si 11 (resp 00) n'apparaît pas.
- Soit σ_0 le morphisme de $\mathcal{A}^*$ defini par $0 \mapsto 0 \quad 1 \mapsto 10$.
- Tout mot sturmien u de type 0 (resp. 1) peut être écrit (à la première lettre près), $u=\sigma_0(v)$ (resp.$u=\sigma_1(v)$).
- il est remarquable que v est aussi sturmien.

Mots de complexité minimale

- Toute suite apériodique a une complexité au moins $n+1$.
- les mots de de complexité $n+1$, appelés mots sturmiens, existent.
- $p(1)=2 \implies$ 2 lettres : $\mathcal{A}=\{0,1\}$.
- $p(2)=3 \implies$ 00 ou 11 n'apparaît pas (10, 01 doivent exister).
- u est de type 0 (resp. 1) si 11 (resp 00) n'apparaît pas.
- Soit σ_0 le morphisme de $\mathcal{A}^*$ defini par $0 \mapsto 0 \quad 1 \mapsto 10$.
- Tout mot sturmien u de type 0 (resp. 1) peut être écrit (à la première lettre près), $u=\sigma_0(v)$ (resp.$u=\sigma_1(v)$).
- il est remarquable que v est aussi sturmien.

Mots de complexité minimale

- Toute suite apériodique a une complexité au moins $n+1$.
- les mots de de complexité $n+1$, appelés mots sturmiens, existent.
- $p(1)=2 \implies$ 2 lettres : $\mathcal{A}=\{0,1\}$.
- $p(2)=3 \implies$ 00 ou 11 n'apparaît pas (10, 01 doivent exister).
- u est de type 0 (resp. 1) si 11 (resp 00) n'apparaît pas.
- Soit σ_0 le morphisme de $\mathcal{A}^*$ defini par $0 \mapsto 0 \quad 1 \mapsto 10$.
- Tout mot sturmien u de type 0 (resp. 1) peut être écrit (à la première lettre près), $u=\sigma_0(v)$ (resp.$u=\sigma_1(v)$).
- il est remarquable que v est aussi sturmien.

Fraction continue additive

- A un système sturmien Ω, on associe une suite σ_{i_n}, $i_n \in \{0, 1\}$
- $u = \sigma_{i_0}\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_n}(w)$
- Un système sturmien system est complètement caracterisé par la fréquence x de 0.
- La fréquence de la suite recodée est donnée par $\frac{x}{1-x}$ sur $[0; \frac{1}{2}]$ et $2 - \frac{1}{x}$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

Fraction continue additive

- A un système sturmien Ω, on associe une suite σ_{i_n}, $i_n \in \{0, 1\}$
- $u = \sigma_{i_0}\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_n}(w)$
- Un système sturmien system est complètement caracterisé par la fréquence x de 0.
- La fréquence de la suite recodée est donnée par $\frac{x}{1-x}$ sur $[0; \frac{1}{2}]$ et $2 - \frac{1}{x}$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

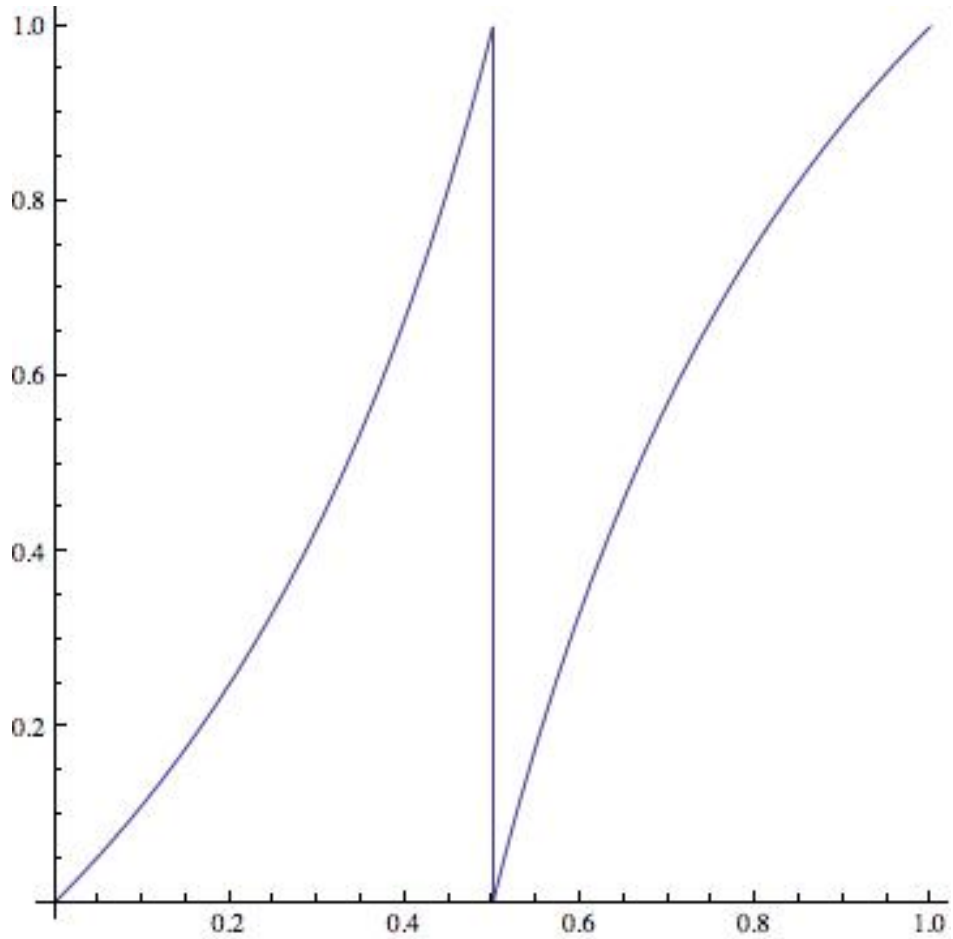
Fraction continue additive

- A un système sturmien Ω, on associe une suite σ_{i_n}, $i_n \in \{0, 1\}$
- $u = \sigma_{i_0}\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_n}(w)$
- Un système sturmien system est complètement caracterisé par la fréquence x de 0.
- La fréquence de la suite recodée est donnée par $\frac{x}{1-x}$ sur $[0; \frac{1}{2}]$ et $2 - \frac{1}{x}$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

Fraction continue additive

- A un système sturmien Ω, on associe une suite σ_{i_n}, $i_n \in \{0, 1\}$
- $u = \sigma_{i_0}\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_n}(w)$
- Un système sturmien system est complètement caracterisé par la fréquence x de 0.
- La fréquence de la suite recodée est donnée par $\frac{x}{1-x}$ sur $[0; \frac{1}{2}]$ et $2 - \frac{1}{x}$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

Fraction continue additive



Fraction continue classique

- On retrouve facilement la fraction continue classique.
- on comprime la suite de substitutions $\sigma_0^{a_0}\sigma_1^{a_1}\sigma_0^{a_2}\dots\sigma_0^{a_{2k}}$
- On montre que la fréquence de 0 est
- $$x = \cfrac{1}{a_0 + 1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}}$$
- a_n est l'expansion de $\frac{x}{1-x}$.

Fraction continue classique

- On retrouve facilement la fraction continue classique.
- on comprime la suite de substitutions $\sigma_0^{a_0}\sigma_1^{a_1}\sigma_0^{a_2}\dots\sigma_0^{a_{2k}}$
- On montre que la fréquence de 0 est
- $$x = \cfrac{1}{a_0 + 1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}}$$
- a_n est l'expansion de $\frac{x}{1-x}$.

Fraction continue classique

- On retrouve facilement la fraction continue classique.
- on comprime la suite de substitutions $\sigma_0^{a_0}\sigma_1^{a_1}\sigma_0^{a_2}\dots\sigma_0^{a_{2k}}$
- On montre que la fréquence de 0 est
- $$x = \cfrac{1}{a_0 + 1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}}$$
- a_n est l'expansion de $\frac{x}{1-x}$.

Fraction continue classique

- On retrouve facilement la fraction continue classique.
- on comprime la suite de substitutions $\sigma_0^{a_0}\sigma_1^{a_1}\sigma_0^{a_2}\dots\sigma_0^{a_{2k}}$
- On montre que la fréquence de 0 est
- $$x = \cfrac{1}{a_0 + 1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}}$$
- a_n est l'expansion de $\frac{x}{1-x}$.

Fraction continue classique

- On retrouve facilement la fraction continue classique.
- on comprime la suite de substitutions $\sigma_0^{a_0}\sigma_1^{a_1}\sigma_0^{a_2}\dots\sigma_0^{a_{2k}}$
- On montre que la fréquence de 0 est
- $$x = \cfrac{1}{a_0 + 1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}}$$
- a_n est l'expansion de $\frac{x}{1-x}$.

Fonction ? de Minkowski

- On peut conjuguer la FC additive au développement en base 2.
- A un $x \in [0,1]$ avec développement additif ϵ_n, on associe $y \in [0,1]$ avec développement ϵ_n en base 2.
- C'est la Fonction ? de Minkowski
- Elle envoie les rationnels sur les dyadiques, et les quadratiques sur les rationnels.
- C'est un homéomorphisme non lipschitz.

Fonction ? de Minkowski

- On peut conjuguer la FC additive au développement en base 2.
- A un $x \in [0,1]$ avec développement additif ϵ_n, on associe $y \in [0,1]$ avec développement ϵ_n en base 2.
- C'est la Fonction ? de Minkowski
- Elle envoie les rationnels sur les dyadiques, et les quadratiques sur les rationnels.
- C'est un homéomorphisme non lipschitz.

Fonction ? de Minkowski

- On peut conjuguer la FC additive au développement en base 2.
- A un $x \in [0,1]$ avec développement additif ϵ_n, on associe $y \in [0,1]$ avec développement ϵ_n en base 2.
- C'est la Fonction ? de Minkowski
- Elle envoie les rationnels sur les dyadiques, et les quadratiques sur les rationnels.
- C'est un homéomorphisme non lipschitz.

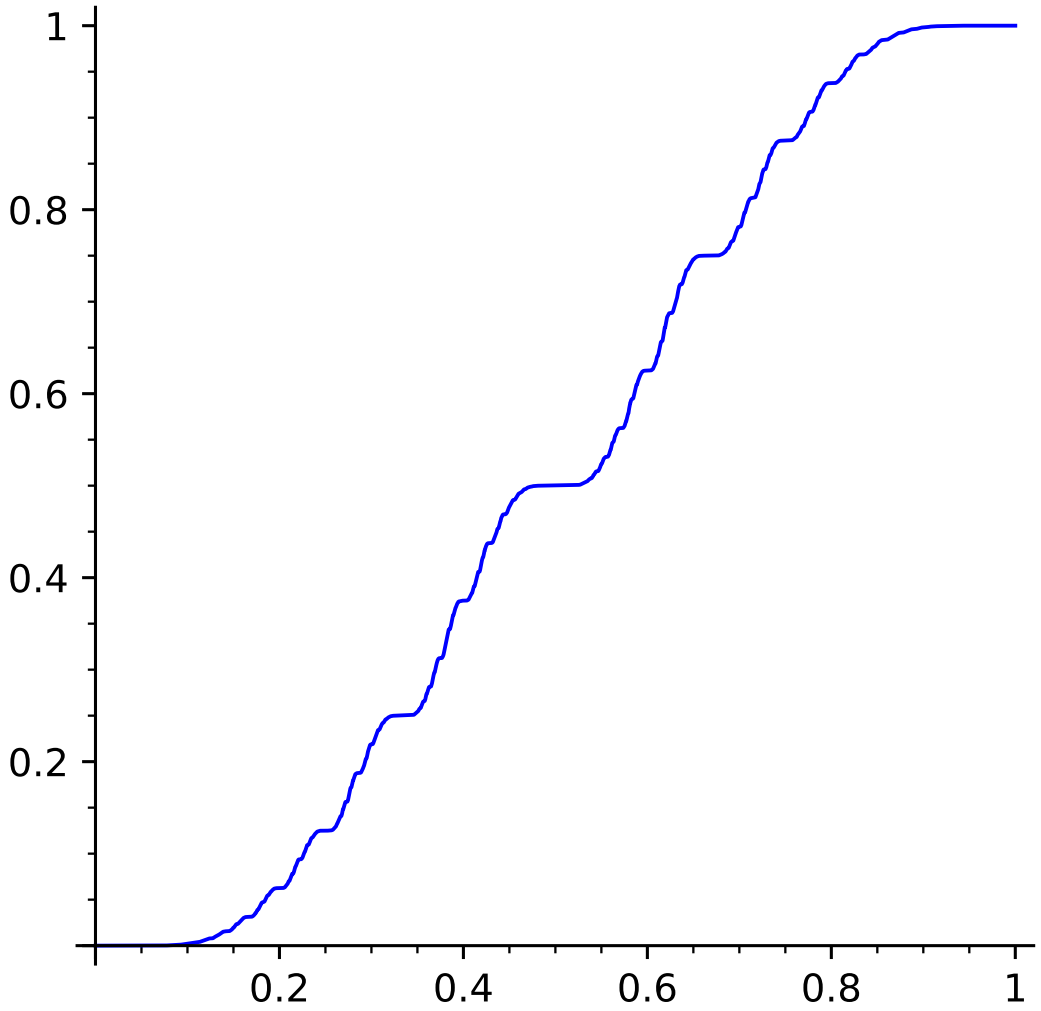
Fonction ? de Minkowski

- On peut conjuguer la FC additive au développement en base 2.
- A un $x \in [0,1]$ avec développement additif ϵ_n, on associe $y \in [0,1]$ avec développement ϵ_n en base 2.
- C'est la Fonction ? de Minkowski
- Elle envoie les rationnels sur les dyadiques, et les quadratiques sur les rationnels.
- C'est un homéomorphisme non lipschitz.

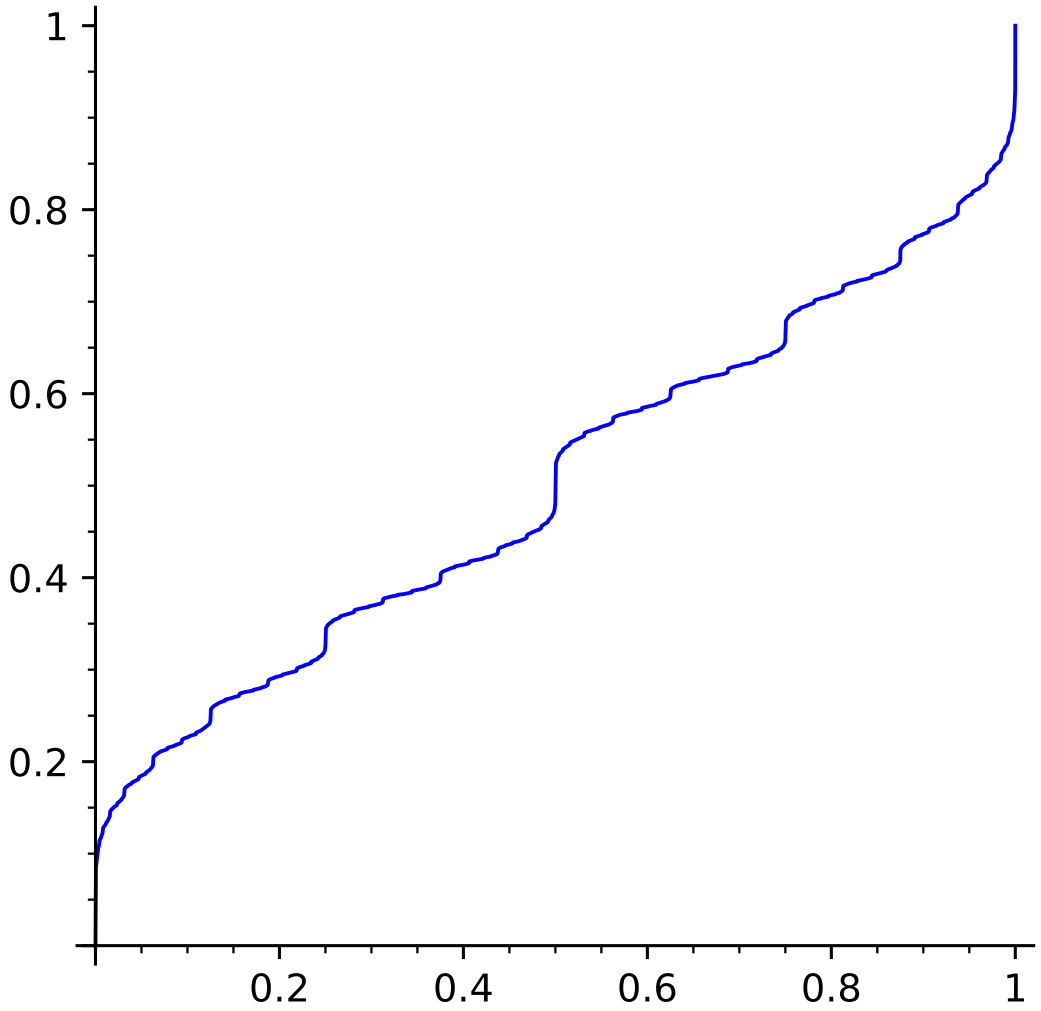
Fonction ? de Minkowski

- On peut conjuguer la FC additive au développement en base 2.
- A un $x \in [0,1]$ avec développement additif ϵ_n, on associe $y \in [0,1]$ avec développement ϵ_n en base 2.
- C'est la Fonction ? de Minkowski
- Elle envoie les rationnels sur les dyadiques, et les quadratiques sur les rationnels.
- C'est un homéomorphisme non lipschitz.

Fonction ? de Minkowski



Fonction □ de Conway



Une généralisation des mots sturmiens (Rauzy, 1983)

- Etape suivante : systèmes de complexité $2n+1$. $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$.
- Large famille, difficile à analyser.

- Définition

Un mot W est dit facteur spécial à droite *s'il peut être étendu à droite comme facteur de plusieurs façons.*

  - complexité $2n+1$: pour tout n, 2 facteurs spéciaux à droite peuvent être étendus de 2 façons, ou bien un seul facteur spécial à droite peut être étendu de 3 façons.

- Définition

Un mot infini sur 3 lettres est strict épisturmien s'il a complexité $2n+1$, et seulement un facteur spécial à gauche et un facteur spécial à droite pour toute longueur.

Une généralisation des mots sturmiens (Rauzy, 1983)

- Etape suivante : systèmes de complexité $2n+1$. $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$.
- Large famille, difficile à analyser.

- Définition

Un mot W est dit facteur spécial à droite *s'il peut être étendu à droite comme facteur de plusieurs façons.*

  - complexité $2n+1$: pour tout n, 2 facteurs spéciaux à droite peuvent être étendus de 2 façons, ou bien un seul facteur spécial à droite peut être étendu de 3 façons.

- Définition

Un mot infini sur 3 lettres est strict épisturmien s'il a complexité $2n+1$, et seulement un facteur spécial à gauche et un facteur spécial à droite pour toute longueur.

Une généralisation des mots sturmiens (Rauzy, 1983)

- Etape suivante : systèmes de complexité $2n+1$. $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$.
- Large famille, difficile à analyser.

- Définition
  Un mot W est dit facteur spécial à droite *s'il peut être étendu à droite comme facteur de plusieurs façons.*
  - complexité $2n+1$: pour tout n, 2 facteurs spéciaux à droite peuvent être étendus de 2 façons, ou bien un seul facteur spécial à droite peut être étendu de 3 façons.
- Définition
  Un mot infini sur 3 lettres est strict épisturmien s'il a complexité $2n+1$, et seulement un facteur spécial à gauche et un facteur spécial à droite pour toute longueur.

Une généralisation des mots sturmiens (Rauzy, 1983)

- Etape suivante : systèmes de complexité $2n+1$. $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$.
- Large famille, difficile à analyser.

- Définition

  Un mot W est dit facteur spécial à droite *s'il peut être étendu à droite comme facteur de plusieurs façons.*

  - complexité $2n+1$: pour tout n, 2 facteurs spéciaux à droite peuvent être étendus de 2 façons, ou bien un seul facteur spécial à droite peut être étendu de 3 façons.

- Définition

  Un mot infini sur 3 lettres est strict épisturmien s'il a complexité $2n+1$, et seulement un facteur spécial à gauche et un facteur spécial à droite pour toute longueur.

Une généralisation des mots sturmiens (Rauzy, 1983)

- Etape suivante : systèmes de complexité $2n+1$. $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$.
- Large famille, difficile à analyser.

- Définition
  Un mot W est dit facteur spécial à droite *s'il peut être étendu à droite comme facteur de plusieurs façons.*
  - complexité $2n+1$: pour tout n, 2 facteurs spéciaux à droite peuvent être étendus de 2 façons, ou bien un seul facteur spécial à droite peut être étendu de 3 façons.

- Définition
  Un mot infini sur 3 lettres est strict épisturmien s'il a complexité $2n+1$, et seulement un facteur spécial à gauche et un facteur spécial à droite pour toute longueur.

Combinatoire des mots épisturmiens

- supposons que 1 est le facteur spécial à droite de longueur 1. Alors $11, 12, 13$ apparaissent, et $2a$ et $3b$ pour un $a, b \in \mathcal{A}$.
- a est facteur spécial à gauche ($1a$ et $2a$ existent), et b aussi, donc $a = b$.
- si $a \neq 1$, le mot est ultimement constant, de valeur a.
- donc $a = 1$: 2 et 3 sont suivis par 1.
- definissons $\sigma_1 : 1 \mapsto 1 \quad 2 \mapsto 21 \quad 3 \mapsto 31$.
- $u = \sigma_1(v)$.

- Proposition

  v est épisturmien strict

Combinatoire des mots épisturmiens

- supposons que 1 est le facteur spécial à droite de longueur 1. Alors $11, 12, 13$ apparaissent, et $2a$ et $3b$ pour un $a, b \in \mathcal{A}$.
- a est facteur spécial à gauche ($1a$ et $2a$ existent), et b aussi, donc $a = b$.
- si $a \neq 1$, le mot est ultimement constant, de valeur a.
- donc $a = 1$: 2 et 3 sont suivis par 1.
- definissons $\sigma_1 : 1 \mapsto 1 \quad 2 \mapsto 21 \quad 3 \mapsto 31$.
- $u = \sigma_1(v)$.

- Proposition

  v est épisturmien strict

Combinatoire des mots épisturmiens

- supposons que 1 est le facteur spécial à droite de longueur 1. Alors $11, 12, 13$ apparaissent, et $2a$ et $3b$ pour un $a, b \in \mathcal{A}$.
- a est facteur spécial à gauche ($1a$ et $2a$ existent), et b aussi, donc $a = b$.
- si $a \neq 1$, le mot est ultimement constant, de valeur a.
- donc $a = 1$: 2 et 3 sont suivis par 1.
- definissons $\sigma_1 : 1 \mapsto 1 \quad 2 \mapsto 21 \quad 3 \mapsto 31$.
- $u = \sigma_1(v)$.

- Proposition

  v est épisturmien strict

Combinatoire des mots épisturmiens

- supposons que 1 est le facteur spécial à droite de longueur 1. Alors $11, 12, 13$ apparaissent, et $2a$ et $3b$ pour un $a, b \in \mathcal{A}$.
- a est facteur spécial à gauche ($1a$ et $2a$ existent), et b aussi, donc $a = b$.
- si $a \neq 1$, le mot est ultimement constant, de valeur a.
- donc $a = 1$: 2 et 3 sont suivis par 1.
- definissons $\sigma_1 : 1 \mapsto 1 \quad 2 \mapsto 21 \quad 3 \mapsto 31$.
- $u = \sigma_1(v)$.

- Proposition

  v est épisturmien strict

Combinatoire des mots épisturmiens

- supposons que 1 est le facteur spécial à droite de longueur 1. Alors $11, 12, 13$ apparaissent, et $2a$ et $3b$ pour un $a, b \in \mathcal{A}$.
- a est facteur spécial à gauche ($1a$ et $2a$ existent), et b aussi, donc $a = b$.
- si $a \neq 1$, le mot est ultimement constant, de valeur a.
- donc $a = 1$: 2 et 3 sont suivis par 1.
- definissons $\sigma_1 : 1 \mapsto 1 \quad 2 \mapsto 21 \quad 3 \mapsto 31$.
- $u = \sigma_1(v)$.

- Proposition

  v est épisturmien strict

Combinatoire des mots épisturmiens

- supposons que 1 est le facteur spécial à droite de longueur 1. Alors $11, 12, 13$ apparaissent, et $2a$ et $3b$ pour un $a, b \in \mathcal{A}$.
- a est facteur spécial à gauche ($1a$ et $2a$ existent), et b aussi, donc $a = b$.
- si $a \neq 1$, le mot est ultimement constant, de valeur a.
- donc $a = 1$: 2 et 3 sont suivis par 1.
- definissons $\sigma_1 : 1 \mapsto 1 \quad 2 \mapsto 21 \quad 3 \mapsto 31$.
- $u = \sigma_1(v)$.

- Proposition

v est épisturmien strict

Combinatoire des mots épisturmiens

- supposons que 1 est le facteur spécial à droite de longueur 1. Alors $11, 12, 13$ apparaissent, et $2a$ et $3b$ pour un $a, b \in \mathcal{A}$.
- a est facteur spécial à gauche ($1a$ et $2a$ existent), et b aussi, donc $a = b$.
- si $a \neq 1$, le mot est ultimement constant, de valeur a.
- donc $a = 1$: 2 et 3 sont suivis par 1.
- definissons $\sigma_1 : 1 \mapsto 1 \quad 2 \mapsto 21 \quad 3 \mapsto 31$.
- $u = \sigma_1(v)$.

- Proposition

  v est épisturmien strict

Generation des systèmes épisturmiens

- A tout système épisturmien Ω, on associe une suite σ_{i_n}, avec $i_n \in \{1, 2, 3\}$
- $u = \sigma_{i_0}\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_n}(w)$.
- La suite i_n prend toutes les valeurs une infinité de fois.
- Elle caractérise le système.

Generation des systèmes épisturmiens

- A tout système épisturmien Ω, on associe une suite σ_{i_n}, avec $i_n \in \{1, 2, 3\}$
- $u = \sigma_{i_0}\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_n}(w)$.
- La suite i_n prend toutes les valeurs une infinité de fois.
- Elle caractérise le système.

Generation des systèmes épisturmiens

- A tout système épisturmien Ω, on associe une suite σ_{i_n}, avec $i_n \in \{1, 2, 3\}$
- $u = \sigma_{i_0}\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_n}(w)$.
- La suite i_n prend toutes les valeurs une infinité de fois.
- Elle caractérise le système.

Generation des systèmes épisturmiens

- A tout système épisturmien Ω, on associe une suite σ_{i_n}, avec $i_n \in \{1, 2, 3\}$
- $u = \sigma_{i_0}\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\ldots\sigma_{i_n}(w)$.
- La suite i_n prend toutes les valeurs une infinité de fois.
- Elle caractérise le système.

Dynamique des systèmes épisturmiens

- les systèmes épisturmien ont une fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3) bien définie.
- les systèmes épisturmien avec suite génératrice périodique sont bien compris (systèmes substitutifs).
- Ils ont un spectre discret, et sont conjugués à des translations du tore.
- Ils correspondent aux ensembles modèles, et au quasi-cristaux obtenus par coupe et projection.
- Pour tout facteur W de longueur n, soit $I(W)$ l'abelianisation de W ; la différence $I(W) - n(f_1, f_2, f_3)$ est bornée.
- D'un autre côté (Cassaigne, Ferenczi, Zamboni) :
- Pour certains systèmes avec "quotient partiels non bornés"
- La différence $I(W) - n(f_1, f_2, f_3)$ est NON bornée.

Dynamique des systèmes épisturmiens

- les systèmes épisturmien ont une fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3) bien définie.
- les systèmes épisturmien avec suite génératrice périodique sont bien compris (systèmes substitutifs).
- Ils ont un spectre discret, et sont conjugués à des translations du tore.
- Ils correspondent aux ensembles modèles, et au quasi-cristaux obtenus par coupe et projection.
- Pour tout facteur W de longueur n, soit $I(W)$ l'abelianisation de W ; la différence $I(W) - n(f_1, f_2, f_3)$ est bornée.
- D'un autre côté (Cassaigne, Ferenczi, Zamboni) :
- Pour certains systèmes avec "quotient partiels non bornés"
- La différence $I(W) - n(f_1, f_2, f_3)$ est NON bornée.

Dynamique des systèmes épisturmiens

- les systèmes épisturmien ont une fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3) bien définie.
- les systèmes épisturmien avec suite génératrice périodique sont bien compris (systèmes substitutifs).
- Ils ont un spectre discret, et sont conjugués à des translations du tore.
- Ils correspondent aux ensembles modèles, et au quasi-cristaux obtenus par coupe et projection.
- Pour tout facteur W de longueur n, soit $I(W)$ l'abelianisation de W ; la différence $I(W) - n(f_1, f_2, f_3)$ est bornée.
- D'un autre côté (Cassaigne, Ferenczi, Zamboni) :
- Pour certains systèmes avec "quotient partiels non bornés"
- La différence $I(W) - n(f_1, f_2, f_3)$ est NON bornée.

Dynamique des systèmes épisturmiens

- les systèmes épisturmien ont une fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3) bien définie.
- les systèmes épisturmien avec suite génératrice périodique sont bien compris (systèmes substitutifs).
- Ils ont un spectre discret, et sont conjugués à des translations du tore.
- Ils correspondent aux ensembles modèles, et au quasi-cristaux obtenus par coupe et projection.
- Pour tout facteur W de longueur n, soit $I(W)$ l'abelianisation de W ; la différence $I(W) - n(f_1, f_2, f_3)$ est bornée.
- D'un autre côté (Cassaigne, Ferenczi, Zamboni) :
- Pour certains systèmes avec "quotient partiels non bornés"
- La différence $I(W) - n(f_1, f_2, f_3)$ est NON bornée.

Dynamique des systèmes épisturmiens

- les systèmes épisturmien ont une fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3) bien définie.
- les systèmes épisturmien avec suite génératrice périodique sont bien compris (systèmes substitutifs).
- Ils ont un spectre discret, et sont conjugués à des translations du tore.
- Ils correspondent aux ensembles modèles, et au quasi-cristaux obtenus par coupe et projection.
- Pour tout facteur W de longueur n, soit $I(W)$ l'abelianisation de W ; la différence $I(W) - n(f_1, f_2, f_3)$ est bornée.
- D'un autre côté (Cassaigne, Ferenczi, Zamboni) :
- Pour certains systèmes avec "quotient partiels non bornés"
- La différence $I(W) - n(f_1, f_2, f_3)$ est NON bornée.

Dynamique des systèmes épisturmiens

- les systèmes épisturmien ont une fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3) bien définie.
- les systèmes épisturmien avec suite génératrice périodique sont bien compris (systèmes substitutifs).
- Ils ont un spectre discret, et sont conjugués à des translations du tore.
- Ils correspondent aux ensembles modèles, et au quasi-cristaux obtenus par coupe et projection.
- Pour tout facteur W de longueur n, soit $I(W)$ l'abelianisation de W ; la différence $I(W) - n(f_1, f_2, f_3)$ est bornée.
- D'un autre côté (Cassaigne, Ferenczi, Zamboni) :
- Pour certains systèmes avec "quotient partiels non bornés"
- La différence $I(W) - n(f_1, f_2, f_3)$ est NON bornée.

Dynamique des systèmes épisturmiens

- les systèmes épisturmien ont une fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3) bien définie.
- les systèmes épisturmien avec suite génératrice périodique sont bien compris (systèmes substitutifs).
- Ils ont un spectre discret, et sont conjugués à des translations du tore.
- Ils correspondent aux ensembles modèles, et au quasi-cristaux obtenus par coupe et projection.
- Pour tout facteur W de longueur n, soit $I(W)$ l'abelianisation de W ; la différence $I(W) - n(f_1, f_2, f_3)$ est bornée.
- D'un autre côté (Cassaigne, Ferenczi, Zamboni) :
- Pour certains systèmes avec "quotient partiels non bornés"
- La différence $I(W) - n(f_1, f_2, f_3)$ est NON bornée.

Dynamique des systèmes épisturmiens

- les systèmes épisturmien ont une fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3) bien définie.
- les systèmes épisturmien avec suite génératrice périodique sont bien compris (systèmes substitutifs).
- Ils ont un spectre discret, et sont conjugués à des translations du tore.
- Ils correspondent aux ensembles modèles, et au quasi-cristaux obtenus par coupe et projection.
- Pour tout facteur W de longueur n, soit $I(W)$ l'abelianisation de W ; la différence $I(W) - n(f_1, f_2, f_3)$ est bornée.
- D'un autre côté (Cassaigne, Ferenczi, Zamboni) :
- Pour certains systèmes avec "quotient partiels non bornés"
- La différence $I(W) - n(f_1, f_2, f_3)$ est NON bornée.

Fréquence des lettres

- La fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3) définit complètement le système.
- Tout vecteur de fréquence n'est pas possible :
- Pour un système de type 1, on a $f_1 > f_2 + f_3$.
- Le triangle central du simplexe est interdit.
- L'ensemble des fréquences possibles est un IFS pour les applications sur le simplexe :
- $(x, y, z) \mapsto (\frac{x+y+z}{1+y+z}, \frac{y}{1+y+z}, \frac{z}{1+y+z})$
- et 2 applications symétriques.
- Cet IFS possède 3 points fixes indifférents.

Fréquence des lettres

- La fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3) définit complètement le système.
- Tout vecteur de fréquence n'est pas possible :
- Pour un système de type 1, on a $f_1 > f_2 + f_3$.
- Le triangle central du simplexe est interdit.
- L'ensemble des fréquences possibles est un IFS pour les applications sur le simplexe :
- $(x, y, z) \mapsto (\frac{x+y+z}{1+y+z}, \frac{y}{1+y+z}, \frac{z}{1+y+z})$
- et 2 applications symétriques.
- Cet IFS possède 3 points fixes indifférents.

Fréquence des lettres

- La fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3) définit complètement le système.
- Tout vecteur de fréquence n'est pas possible :
- Pour un système de type 1, on a $f_1 > f_2 + f_3$.
- Le triangle central du simplexe est interdit.
- L'ensemble des fréquences possibles est un IFS pour les applications sur le simplexe :
- $(x, y, z) \mapsto (\frac{x+y+z}{1+y+z}, \frac{y}{1+y+z}, \frac{z}{1+y+z})$
- et 2 applications symétriques.
- Cet IFS possède 3 points fixes indifférents.

Fréquence des lettres

- La fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3) définit complètement le système.
- Tout vecteur de fréquence n'est pas possible :
- Pour un système de type 1, on a $f_1 > f_2 + f_3$.
- Le triangle central du simplexe est interdit.
- L'ensemble des fréquences possibles est un IFS pour les applications sur le simplexe :
- $(x, y, z) \mapsto (\frac{x+y+z}{1+y+z}, \frac{y}{1+y+z}, \frac{z}{1+y+z})$
- et 2 applications symétriques.
- Cet IFS possède 3 points fixes indifférents.

Fréquence des lettres

- La fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3) définit complètement le système.
- Tout vecteur de fréquence n'est pas possible :
- Pour un système de type 1, on a $f_1 > f_2 + f_3$.
- Le triangle central du simplexe est interdit.
- L'ensemble des fréquences possibles est un IFS pour les applications sur le simplexe :
- $(x, y, z) \mapsto (\frac{x+y+z}{1+y+z}, \frac{y}{1+y+z}, \frac{z}{1+y+z})$
- et 2 applications symétriques.
- Cet IFS possède 3 points fixes indifférents.

Fréquence des lettres

- La fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3) définit complètement le système.
- Tout vecteur de fréquence n'est pas possible :
- Pour un système de type 1, on a $f_1 > f_2 + f_3$.
- Le triangle central du simplexe est interdit.
- L'ensemble des fréquences possibles est un IFS pour les applications sur le simplexe :
- $(x, y, z) \mapsto (\frac{x+y+z}{1+y+z}, \frac{y}{1+y+z}, \frac{z}{1+y+z})$
- et 2 applications symétriques.
- Cet IFS possède 3 points fixes indifférents.

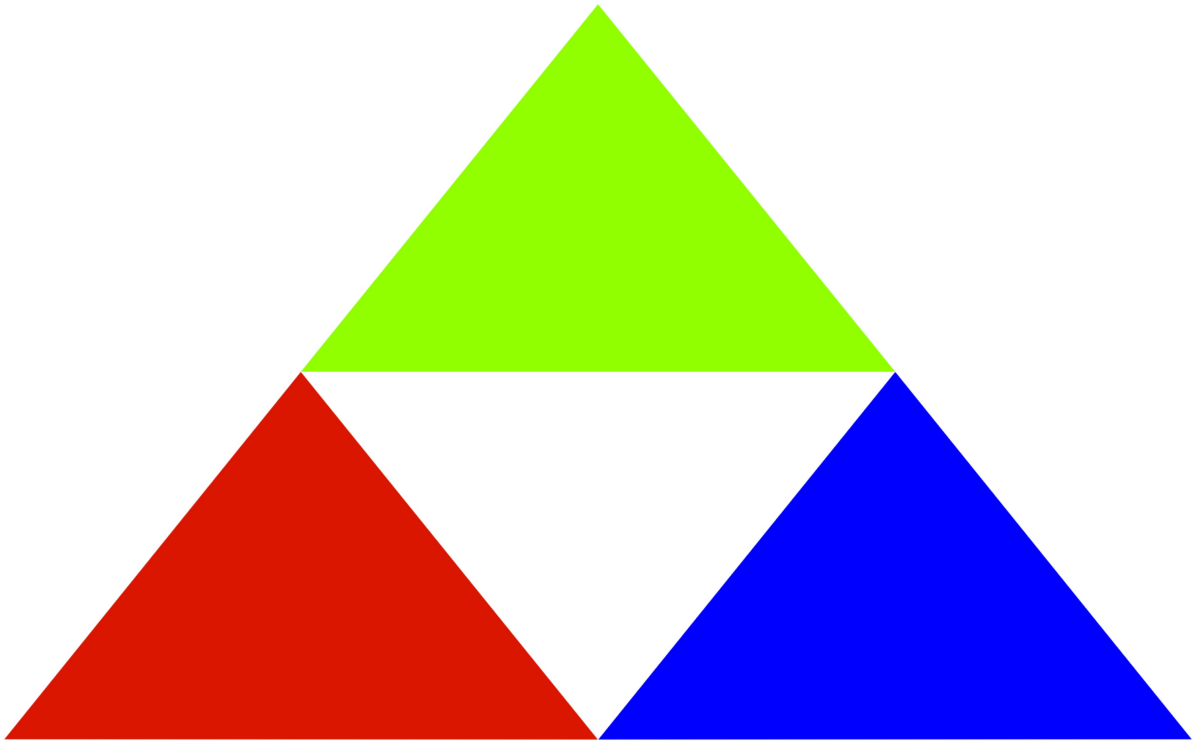
Fréquence des lettres

- La fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3) définit complètement le système.
- Tout vecteur de fréquence n'est pas possible :
- Pour un système de type 1, on a $f_1 > f_2 + f_3$.
- Le triangle central du simplexe est interdit.
- L'ensemble des fréquences possibles est un IFS pour les applications sur le simplexe :
- $(x, y, z) \mapsto (\frac{x+y+z}{1+y+z}, \frac{y}{1+y+z}, \frac{z}{1+y+z})$
- et 2 applications symétriques.
- Cet IFS possède 3 points fixes indifférents.

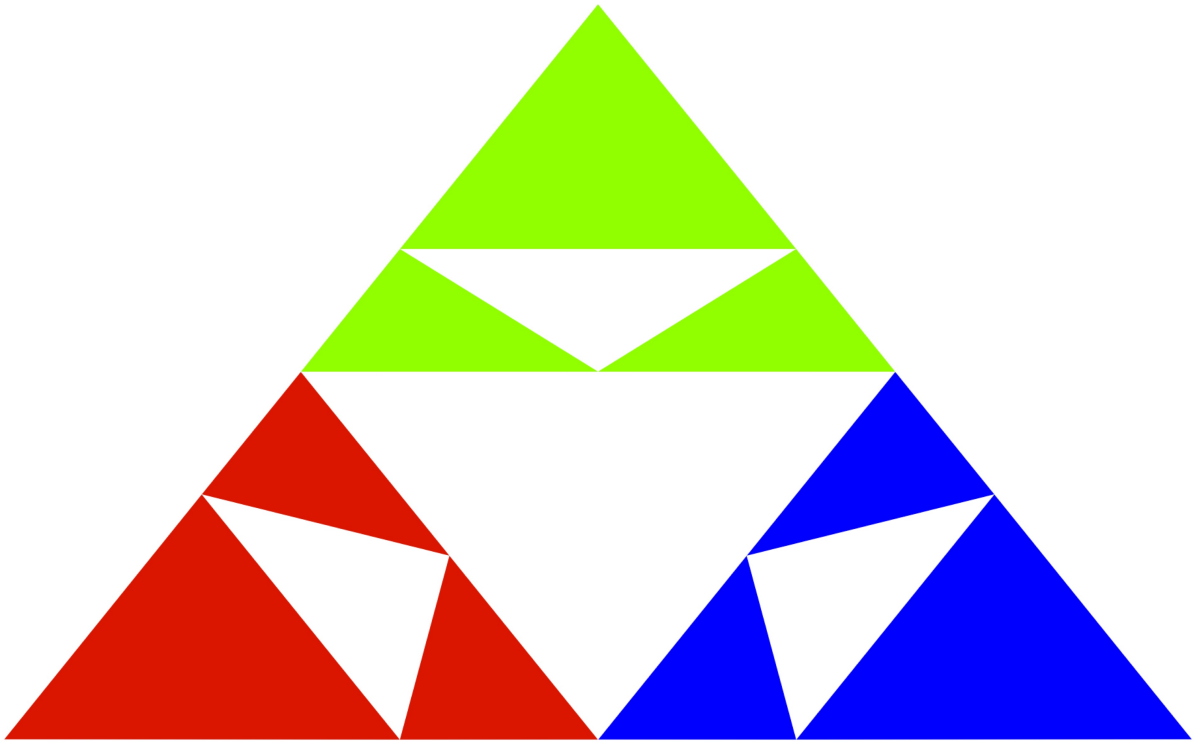
Fréquence des lettres

- La fréquence des lettres (f_1, f_2, f_3) définit complètement le système.
- Tout vecteur de fréquence n'est pas possible :
- Pour un système de type 1, on a $f_1 > f_2 + f_3$.
- Le triangle central du simplexe est interdit.
- L'ensemble des fréquences possibles est un IFS pour les applications sur le simplexe :
- $(x, y, z) \mapsto (\frac{x+y+z}{1+y+z}, \frac{y}{1+y+z}, \frac{z}{1+y+z})$
- et 2 applications symétriques.
- Cet IFS possède 3 points fixes indifférents.

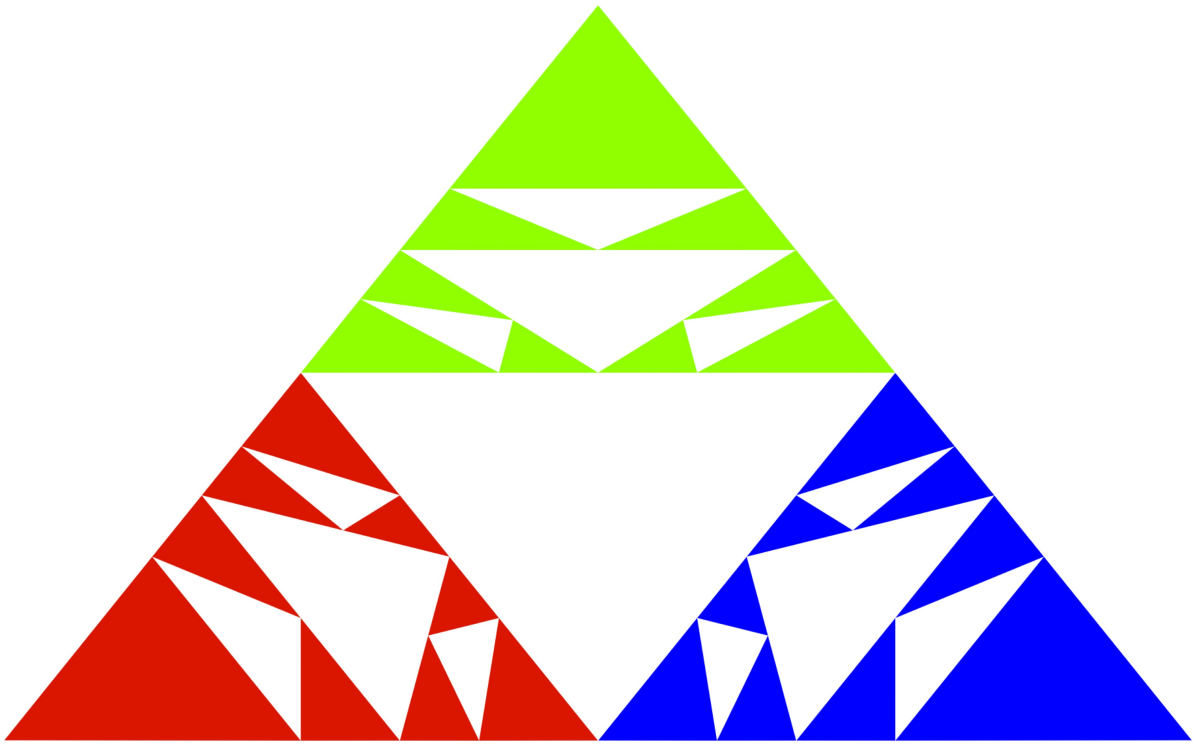
La baderne de Rauzy



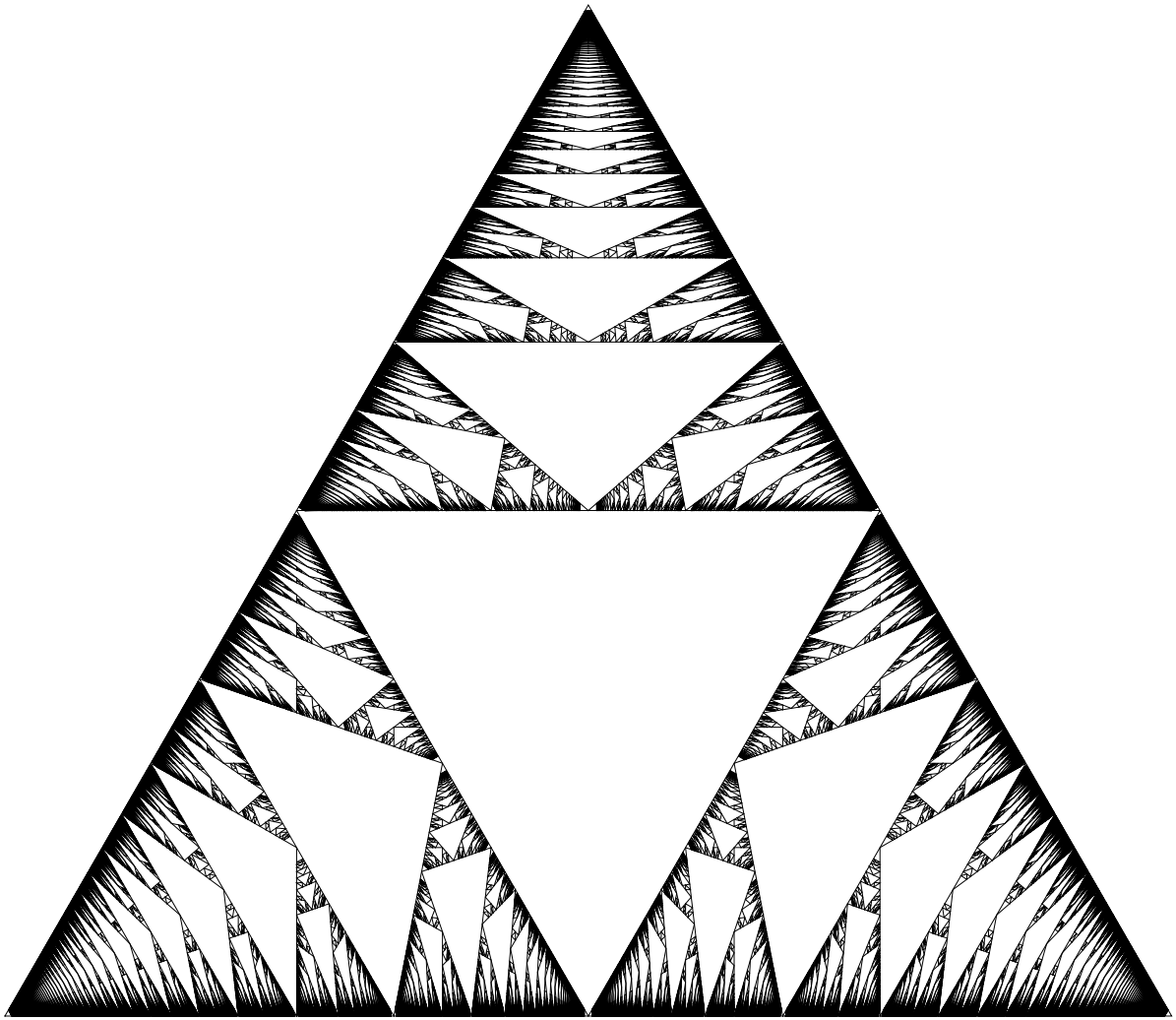
La baderne de Rauzy



La baderne de Rauzy



La baderne de Rauzy



Propriétés de la baderne de Rauzy

- Quelle est sa mesure ?
- Quelle est sa topologie et sa dimension ?
- Topologie : un groupe fondamental avec un nombre non dénombrable de générateurs.
- Elle est homeomorphic au triangle de Sierpinski classique
- Par une extension de la fonction ? de Minkowski.

Propriétés de la baderne de Rauzy

- Quelle est sa mesure ?
- Quelle est sa topologie et sa dimension ?
- Topologie : un groupe fondamental avec un nombre non dénombrable de générateurs.
- Elle est homeomorphic au triangle de Sierpinski classique
- Par une extension de la fonction ? de Minkowski.

Propriétés de la baderne de Rauzy

- Quelle est sa mesure ?
- Quelle est sa topologie et sa dimension ?
- Topologie : un groupe fondamental avec un nombre non dénombrable de générateurs.
- Elle est homeomorphic au triangle de Sierpinski classique
- Par une extension de la fonction ? de Minkowski.

Propriétés de la baderne de Rauzy

- Quelle est sa mesure ?
- Quelle est sa topologie et sa dimension ?
- Topologie : un groupe fondamental avec un nombre non dénombrable de générateurs.
- Elle est homeomorphic au triangle de Sierpinski classique
- Par une extension de la fonction ? de Minkowski.

Propriétés de la baderne de Rauzy

- Quelle est sa mesure ?
- Quelle est sa topologie et sa dimension ?
- Topologie : un groupe fondamental avec un nombre non dénombrable de générateurs.
- Elle est homeomorphic au triangle de Sierpinski classique
- Par une extension de la fonction ? de Minkowski.

Propriétés de la baderne de Rauzy

- Elle est aussi homéomorphe à la baderne d'Apollonius
- La conjugaison est l'identité sur le bord
- Cet ensemble est déjà apparu pour une fraction continue à deux dimensions.

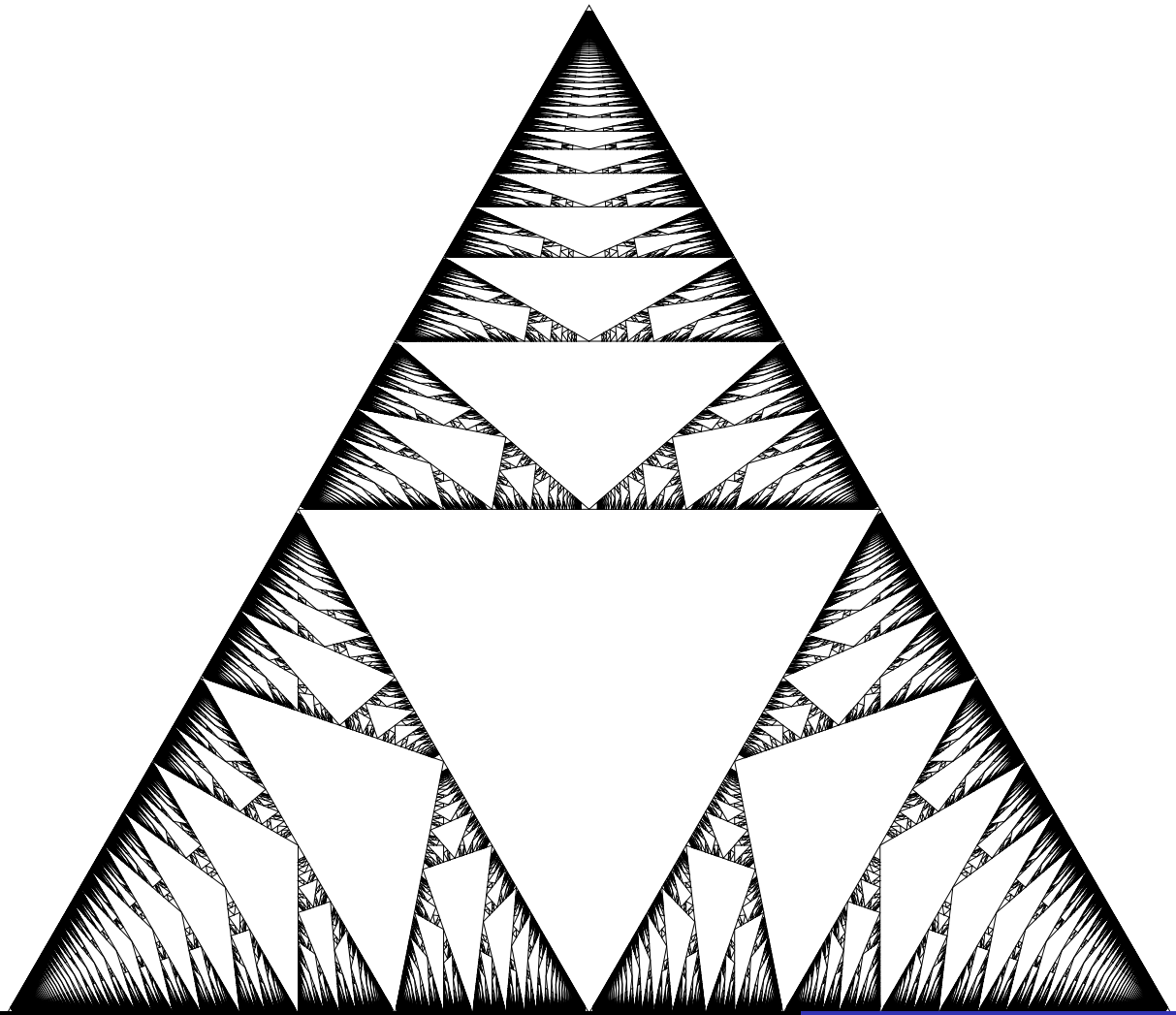
Propriétés de la baderne de Rauzy

- Elle est aussi homéomorphe à la baderne d'Apollonius
- La conjugaison est l'identité sur le bord
- Cet ensemble est déjà apparu pour une fraction continue à deux dimensions.

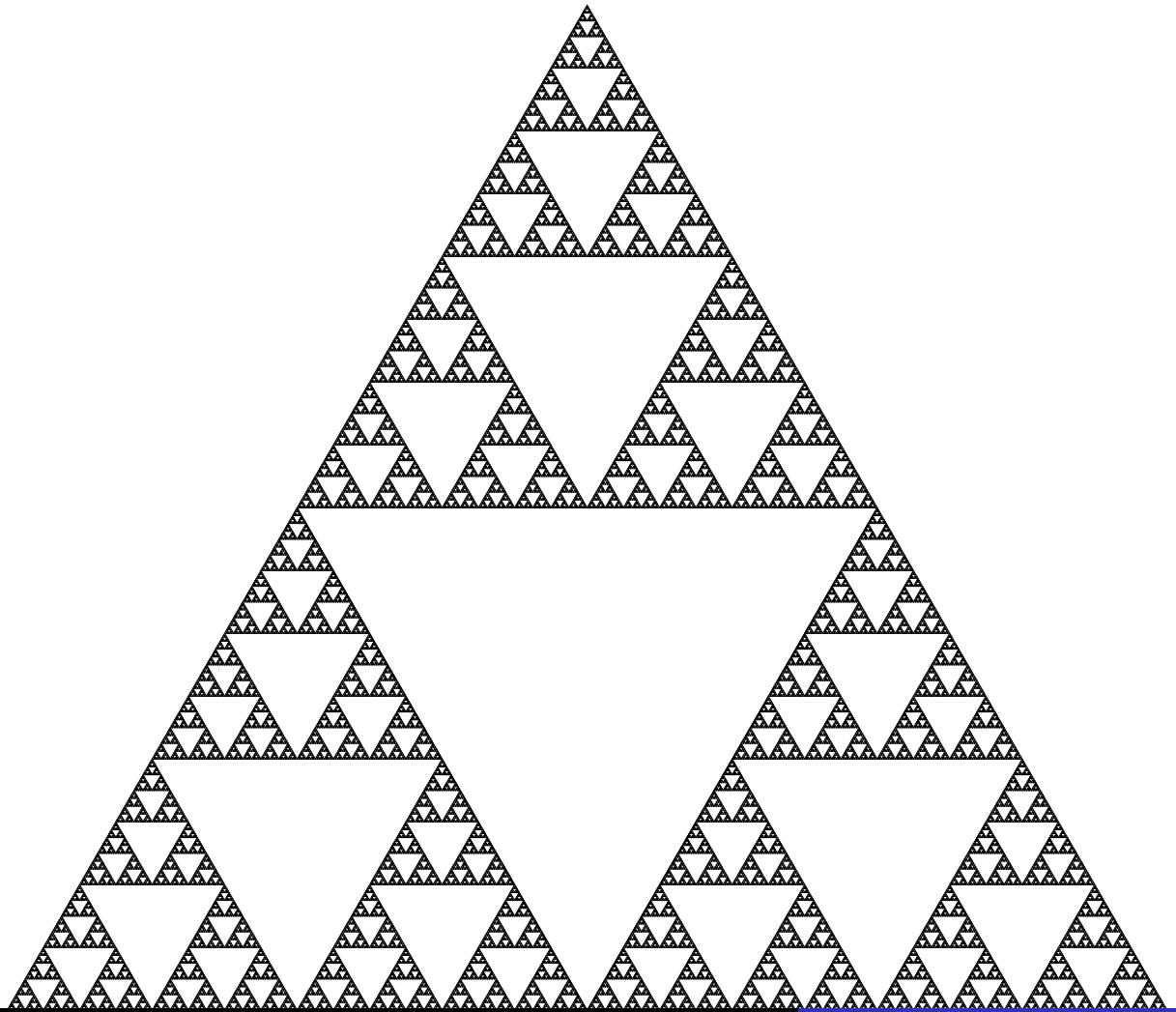
Propriétés de la baderne de Rauzy

- Elle est aussi homéomorphe à la baderne d'Apollonius
- La conjugaison est l'identité sur le bord
- Cet ensemble est déjà apparu pour une fraction continue à deux dimensions.

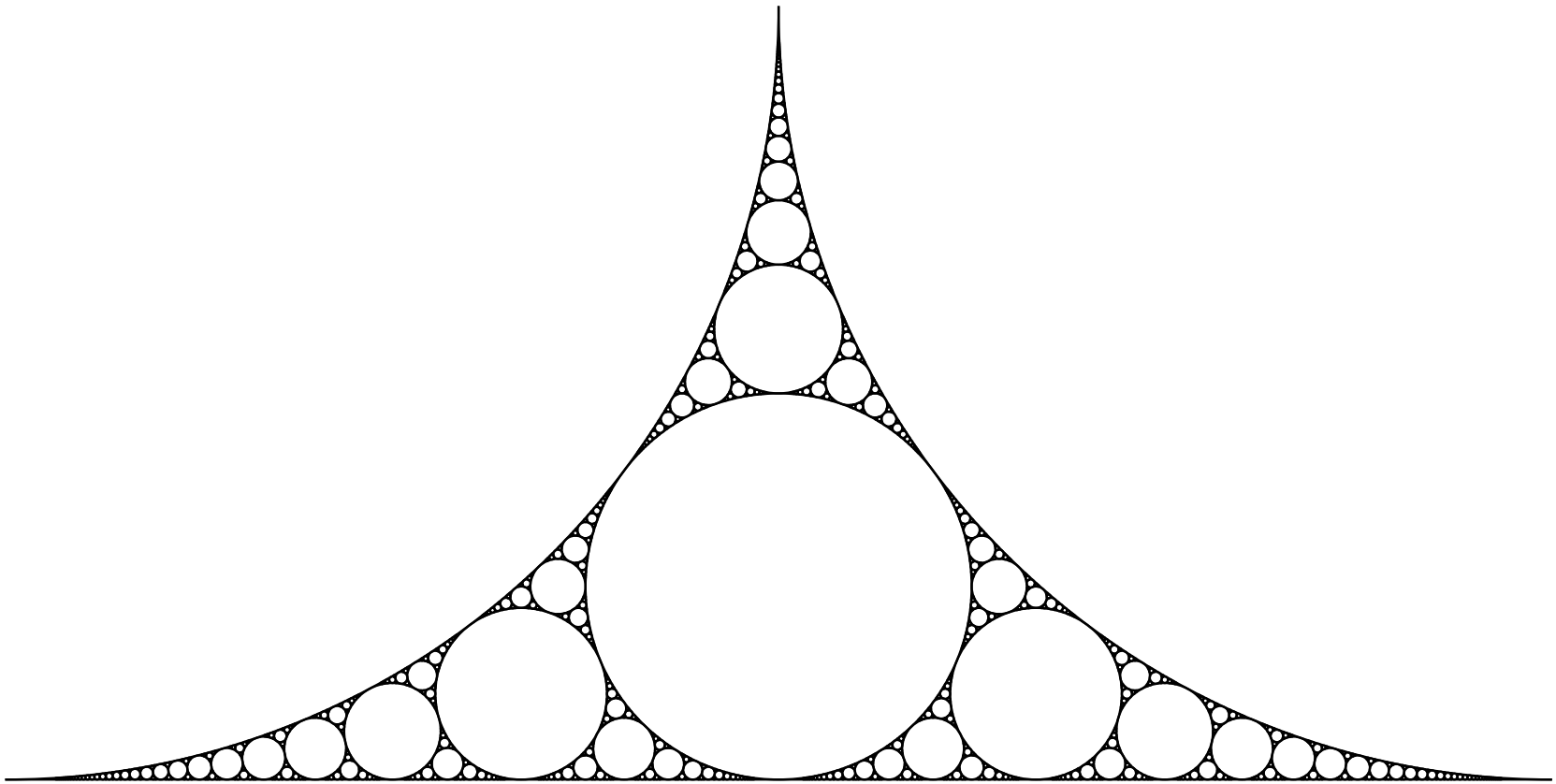
La baderne de Rauzy



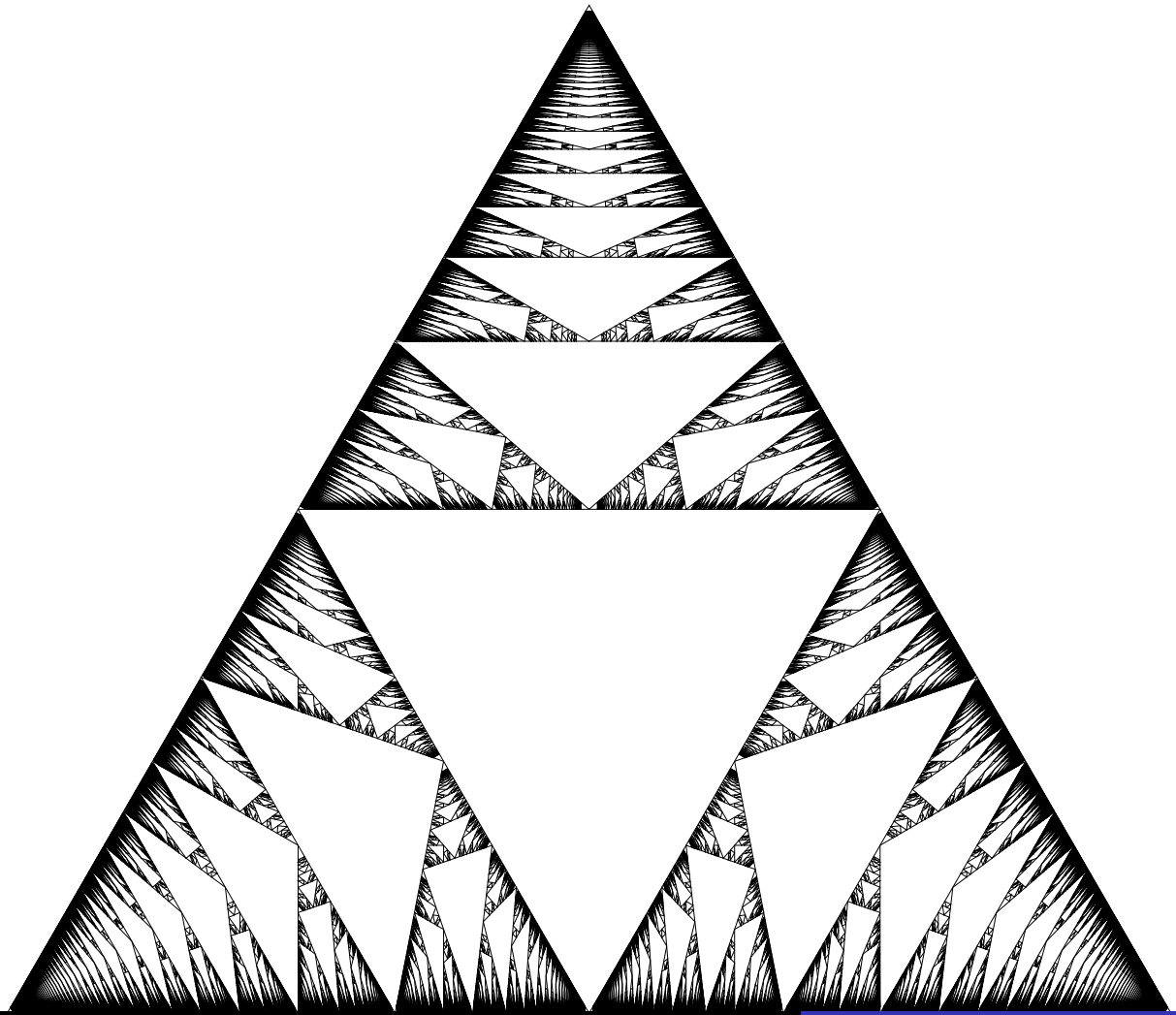
La baderne de Rauzy



La baderne de Rauzy



La baderne de Rauzy



L'algorithme totalement soustractif

- L'algorithme totalement soustractif :
- $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{+3}$
- On retire le plus petit des deux autres.
- Dual de l'algorithme précédent
- Les sommets sont des points fixes attractifs indifférents.

L'algorithme totalement soustractif

- L'algorithme totalement soustractif :
- $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{+3}$
- On retire le plus petit des deux autres.
- Dual de l'algorithme précédent
- Les sommets sont des points fixes attractifs indifférents.

L'algorithme totalement soustractif

- L'algorithme totalement soustractif :
- $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{+3}$
- On retire le plus petit des deux autres.
- Dual de l'algorithme précédent
- Les sommets sont des points fixes attractifs indifférents.

L'algorithme totalement soustractif

- L'algorithme totalement soustractif :
- $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{+3}$
- On retire le plus petit des deux autres.
- Dual de l'algorithme précédent
- Les sommets sont des points fixes attractifs indifférents.

L'algorithme totalement soustractif

- L'algorithme totalement soustractif :
- $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{+3}$
- On retire le plus petit des deux autres.
- Dual de l'algorithme précédent
- Les sommets sont des points fixes attractifs indifférents.

L'algorithme totalement soustractif

- Cet algorithme n'est pas ergodique.
- sur le simplexe, il converge presque sûrement vers l'un des sommets.
- L'ensemble des points qui ne convergent pas vers l'un des sommets est de mesure nulle (Meester, Nowicki, 1989).
- C'est le dual de l'algorithme précédent.
- La baderne de Rauzy apparaît ainsi comme un "ensemble de Julia" pour cet algorthm.
- A un changement de coordonnées près.

L'algorithme totalement soustractif

- Cet algorithme n'est pas ergodique.
- sur le simplexe, il converge presque sûrement vers l'un des sommets.
- L'ensemble des points qui ne convergent pas vers l'un des sommets est de mesure nulle (Meester, Nowicki, 1989).
- C'est le dual de l'algorithme précédent.
- La baderne de Rauzy apparaît ainsi comme un "ensemble de Julia" pour cet algorthm.
- A un changement de coordonnées près.

L'algorithme totalement soustractif

- Cet algorithme n'est pas ergodique.
- sur le simplexe, il converge presque sûrement vers l'un des sommets.
- L'ensemble des points qui ne convergent pas vers l'un des sommets est de mesure nulle (Meester, Nowicki, 1989).
- C'est le dual de l'algorithme précédent.
- La baderne de Rauzy apparaît ainsi comme un "ensemble de Julia" pour cet algorthm.
- A un changement de coordonnées près.

L'algorithme totalement soustractif

- Cet algorithme n'est pas ergodique.
- sur le simplexe, il converge presque sûrement vers l'un des sommets.
- L'ensemble des points qui ne convergent pas vers l'un des sommets est de mesure nulle (Meester, Nowicki, 1989).
- C'est le dual de l'algorithme précédent.
- La baderne de Rauzy apparaît ainsi comme un "ensemble de Julia" pour cet algorthm.
- A un changement de coordonnées près.

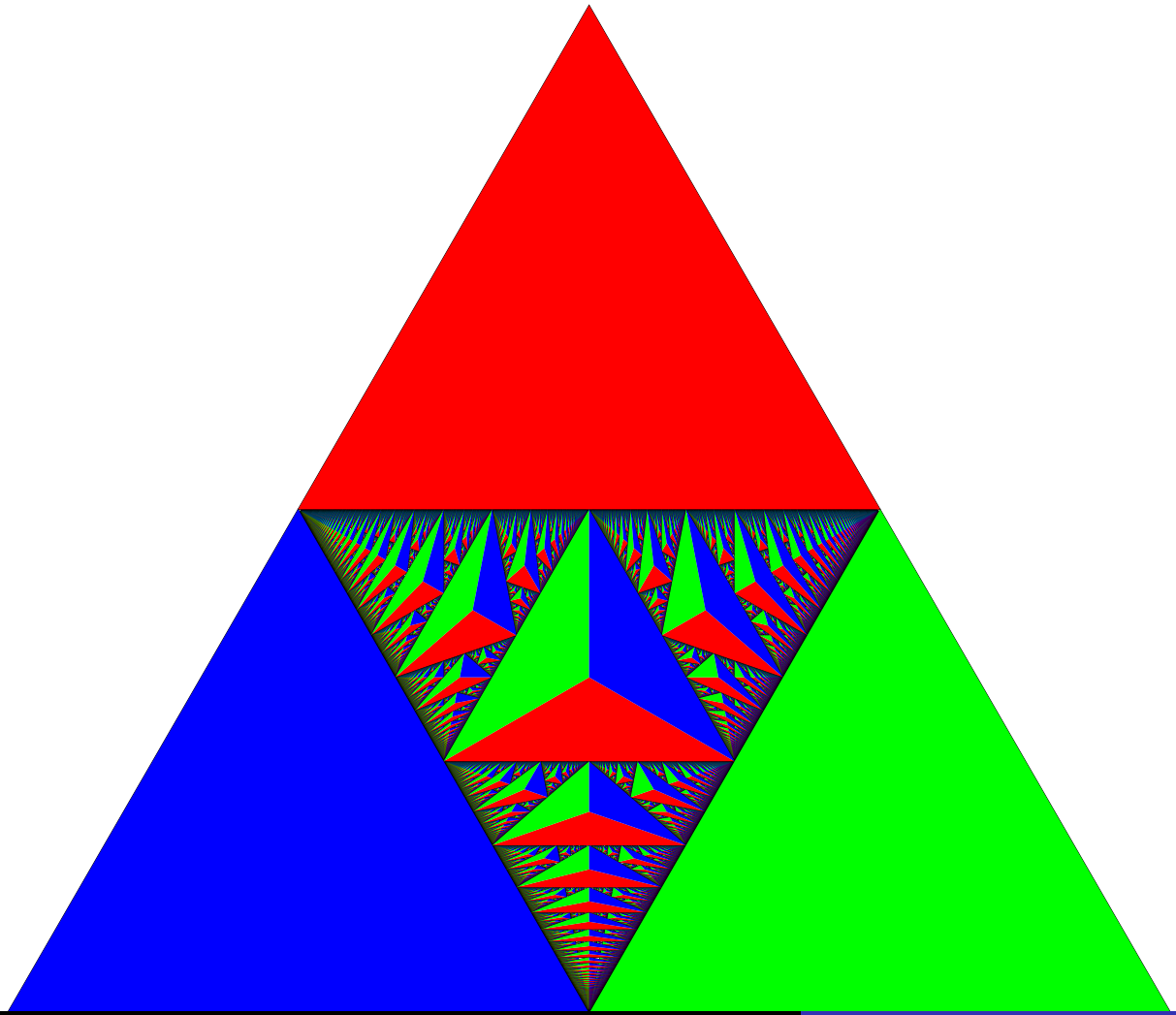
L'algorithme totalement soustractif

- Cet algorithme n'est pas ergodique.
- sur le simplexe, il converge presque sûrement vers l'un des sommets.
- L'ensemble des points qui ne convergent pas vers l'un des sommets est de mesure nulle (Meester, Nowicki, 1989).
- C'est le dual de l'algorithme précédent.
- La baderne de Rauzy apparaît ainsi comme un "ensemble de Julia" pour cet algorthm.
- A un changement de coordonnées près.

L'algorithme totalement soustractif

- Cet algorithme n'est pas ergodique.
- sur le simplexe, il converge presque sûrement vers l'un des sommets.
- L'ensemble des points qui ne convergent pas vers l'un des sommets est de mesure nulle (Meester, Nowicki, 1989).
- C'est le dual de l'algorithme précédent.
- La baderne de Rauzy apparaît ainsi comme un "ensemble de Julia" pour cet algorthm.
- A un changement de coordonnées près.

L'algorithme totalement soustractif



La dynamique des pseudo-groupes de rotations

- Un pseudo-groupe de rotations est engendré par un nombre fini de rotations partielles sur le cercle.
- Il est minimal si tout point a une orbite dense.
- En 1993, Levitt étudie un pseudogroupe engendré par 3 rotations partielles de support total 1
- et il obtient le même ensemble fractal.
- Il prouve lui aussi que sa mesure est bien 0

La dynamique des pseudo-groupes de rotations

- Un pseudo-groupe de rotations est engendré par un nombre fini de rotations partielles sur le cercle.
- Il est minimal si tout point a une orbite dense.
- En 1993, Levitt étudie un pseudogroupe engendré par 3 rotations partielles de support total 1
- et il obtient le même ensemble fractal.
- Il prouve lui aussi que sa mesure est bien 0

La dynamique des pseudo-groupes de rotations

- Un pseudo-groupe de rotations est engendré par un nombre fini de rotations partielles sur le cercle.
- Il est minimal si tout point a une orbite dense.
- En 1993, Levitt étudie un pseudogroupe engendré par 3 rotations partielles de support total 1
- et il obtient le même ensemble fractal.
- Il prouve lui aussi que sa mesure est bien 0

La dynamique des pseudo-groupes de rotations

- Un pseudo-groupe de rotations est engendré par un nombre fini de rotations partielles sur le cercle.
- Il est minimal si tout point a une orbite dense.
- En 1993, Levitt étudie un pseudogroupe engendré par 3 rotations partielles de support total 1
- et il obtient le même ensemble fractal.
- Il prouve lui aussi que sa mesure est bien 0

La dynamique des pseudo-groupes de rotations

- Un pseudo-groupe de rotations est engendré par un nombre fini de rotations partielles sur le cercle.
- Il est minimal si tout point a une orbite dense.
- En 1993, Levitt étudie un pseudogroupe engendré par 3 rotations partielles de support total 1
- et il obtient le même ensemble fractal.
- Il prouve lui aussi que sa mesure est bien 0

La dynamique des pseudo-groupes de rotations

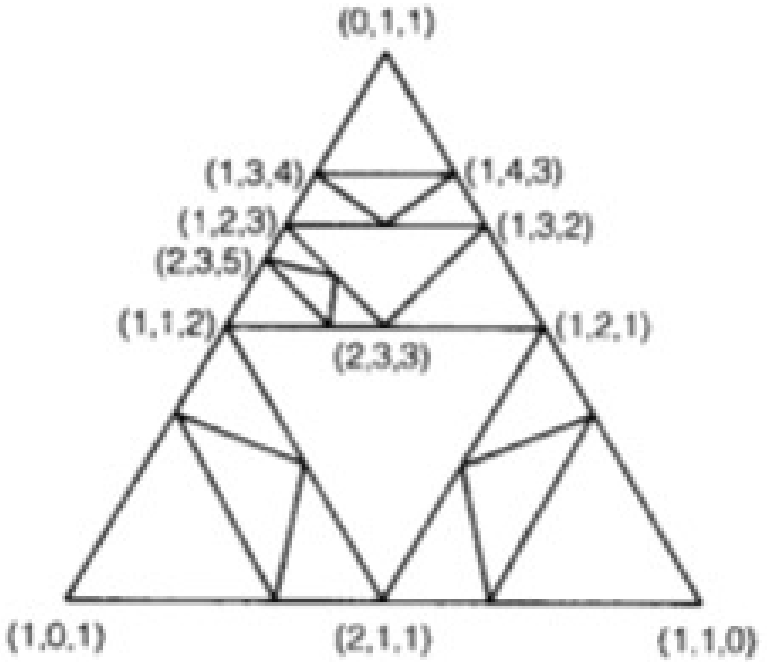


Fig. 7.

Echanges d'intervalles

- En 1981, [A-Yoccoz], un échange d'intervalle avec autosimilarité cubique
- qui peut être codé, sur un ensemble de mesure 1, par le système de Tribonacci.
- En 1991, [A, Rauzy], on montre que c'est le premier d'une famille
- Qui est paramétré par la baderne de Rauzy
- Les propriétés de cette famille ne sont pas encore totalement comprises

Echanges d'intervalles

- En 1981, [A-Yoccoz], un échange d'intervalle avec autosimilarité cubique
- qui peut être codé, sur un ensemble de mesure 1, par le système de Tribonacci.
- En 1991, [A, Rauzy], on montre que c'est le premier d'une famille
- Qui est paramétré par la baderne de Rauzy
- Les propriétés de cette famille ne sont pas encore totalement comprises

Echanges d'intervalles

- En 1981, [A-Yoccoz], un échange d'intervalle avec autosimilarité cubique
- qui peut être codé, sur un ensemble de mesure 1, par le système de Tribonacci.
- En 1991, [A, Rauzy], on montre que c'est le premier d'une famille
- Qui est paramétré par la baderne de Rauzy
- Les propriétés de cette famille ne sont pas encore totalement comprises

Echanges d'intervalles

- En 1981, [A-Yoccoz], un échange d'intervalle avec autosimilarité cubique
- qui peut être codé, sur un ensemble de mesure 1, par le système de Tribonacci.
- En 1991, [A, Rauzy], on montre que c'est le premier d'une famille
- Qui est paramétré par la baderne de Rauzy
- Les propriétés de cette famille ne sont pas encore totalement comprises

Echanges d'intervalles

- En 1981, [A-Yoccoz], un échange d'intervalle avec autosimilarité cubique
- qui peut être codé, sur un ensemble de mesure 1, par le système de Tribonacci.
- En 1991, [A, Rauzy], on montre que c'est le premier d'une famille
- Qui est paramétré par la baderne de Rauzy
- Les propriétés de cette famille ne sont pas encore totalement comprises

Un électron dans un cristal

- On considère une surface triplement périodique dans $\mathbb{R}^3$ (ou une surface de genre 3)
- Un électron mobile sur la surface
- Contraint par un champs magnétique à rester dans un plan.
- La plupart des orbites sont finies.
- Peut on trouver des directions ou les orbites sont infinies ?
- On retrouve le même fractal

Un électron dans un cristal

- On considère une surface triplement périodique dans $\mathbb{R}^3$ (ou une surface de genre 3)
- Un électron mobile sur la surface
- Contraint par un champs magnétique à rester dans un plan.
- La plupart des orbites sont finies.
- Peut on trouver des directions ou les orbites sont infinies ?
- On retrouve le même fractal

Un électron dans un cristal

- On considère une surface triplement périodique dans $\mathbb{R}^3$ (ou une surface de genre 3)
- Un électron mobile sur la surface
- Contraint par un champs magnétique à rester dans un plan.
- La plupart des orbites sont finies.
- Peut on trouver des directions ou les orbites sont infinies ?
- On retrouve le même fractal

Un électron dans un cristal

- On considère une surface triplement périodique dans $\mathbb{R}^3$ (ou une surface de genre 3)
- Un électron mobile sur la surface
- Contraint par un champs magnétique à rester dans un plan.
- La plupart des orbites sont finies.
- Peut on trouver des directions ou les orbites sont infinies ?
- On retrouve le même fractal

Un électron dans un cristal

- On considère une surface triplement périodique dans $\mathbb{R}^3$ (ou une surface de genre 3)
- Un électron mobile sur la surface
- Contraint par un champs magnétique à rester dans un plan.
- La plupart des orbites sont finies.
- Peut on trouver des directions ou les orbites sont infinies ?
- On retrouve le même fractal

Un électron dans un cristal

- On considère une surface triplement périodique dans $\mathbb{R}^3$ (ou une surface de genre 3)
- Un électron mobile sur la surface
- Contraint par un champs magnétique à rester dans un plan.
- La plupart des orbites sont finies.
- Peut on trouver des directions ou les orbites sont infinies ?
- On retrouve le même fractal

Un billiard exotique

- On considère un billiard sur un pavage, avec réfraction -1
- La plupart des orbites sont périodiques
- Mais dans certains cas rares, il y a des orbites denses,
- A nouveau paramétrées par la baderne de Rauzy.

Un billiard exotique

- On considère un billiard sur un pavage, avec réfraction -1
- La plupart des orbites sont périodiques
- Mais dans certains cas rares, il y a des orbites denses,
- A nouveau paramétrées par la baderne de Rauzy.

Un billiard exotique

- On considère un billiard sur un pavage, avec réfraction -1
- La plupart des orbites sont périodiques
- Mais dans certains cas rares, il y a des orbites denses,
- A nouveau paramétrées par la baderne de Rauzy.

Un billiard exotique

- On considère un billiard sur un pavage, avec réfraction -1
- La plupart des orbites sont périodiques
- Mais dans certains cas rares, il y a des orbites denses,
- A nouveau paramétrées par la baderne de Rauzy.

Questions

- Quelle est la dimension ?
- Quelle est la mesure de Hausdorff ? est elle finie ?
- Peut-on trouver une mesure de Gauss pour cet algorithme ?
- Peut on prouver des propriétés "presque sûres" pour les systèmes épisturmiens ?
- Peut-on étendre l'algorithme de Rauzy au simplexe entier ? (Hybrid algorithms - Berthé Labbé)
- Peut-on trouver un analogue des systèmes épisturmiens pour tout vecteur de fréquences ?

Questions

- Quelle est la dimension ?
- Quelle est la mesure de Hausdorff ? est elle finie ?
- Peut-on trouver une mesure de Gauss pour cet algorithme ?
- Peut on prouver des propriétés "presque sûres" pour les systèmes épisturmiens ?
- Peut-on étendre l'algorithme de Rauzy au simplexe entier ? (Hybrid algorithms - Berthé Labbé)
- Peut-on trouver un analogue des systèmes épisturmiens pour tout vecteur de fréquences ?

Questions

- Quelle est la dimension ?
- Quelle est la mesure de Hausdorff ? est elle finie ?
- Peut-on trouver une mesure de Gauss pour cet algorithme ?
- Peut on prouver des propriétés "presque sûres" pour les systèmes épisturmiens ?
- Peut-on étendre l'algorithme de Rauzy au simplexe entier ? (Hybrid algorithms - Berthé Labbé)
- Peut-on trouver un analogue des systèmes épisturmiens pour tout vecteur de fréquences ?

Questions

- Quelle est la dimension ?
- Quelle est la mesure de Hausdorff ? est elle finie ?
- Peut-on trouver une mesure de Gauss pour cet algorithme ?
- Peut on prouver des propriétés "presque sûres" pour les systèmes épisturmiens ?
- Peut-on étendre l'algorithme de Rauzy au simplexe entier ? (Hybrid algorithms - Berthé Labbé)
- Peut-on trouver un analogue des systèmes épisturmiens pour tout vecteur de fréquences ?

Questions

- Quelle est la dimension ?
- Quelle est la mesure de Hausdorff ? est elle finie ?
- Peut-on trouver une mesure de Gauss pour cet algorithme ?
- Peut on prouver des propriétés "presque sûres" pour les systèmes épisturmiens ?
- Peut-on étendre l'algorithme de Rauzy au simplexe entier ? (Hybrid algorithms - Berthé Labbé)
- Peut-on trouver un analogue des systèmes épisturmiens pour tout vecteur de fréquences ?

Questions

- Quelle est la dimension ?
- Quelle est la mesure de Hausdorff ? est elle finie ?
- Peut-on trouver une mesure de Gauss pour cet algorithme ?
- Peut on prouver des propriétés "presque sûres" pour les systèmes épisturmiens ?
- Peut-on étendre l'algorithme de Rauzy au simplexe entier ? (Hybrid algorithms - Berthé Labbé)
- Peut-on trouver un analogue des systèmes épisturmiens pour tout vecteur de fréquences ?